

Matroesjka

Een **matroesjka** is een holle houten pop die onderdeel is van een reeks steeds kleinere in elkaar passende poppen. De poppen kunnen opengemaakt worden door middel van een naad in de buik, behalve de kleinste, die vaak als baby is beschilderd. Zo'n reeks bestaat meestal uit zeven of acht poppetjes, maar ook andere aantallen komen voor.



De poppen worden natuurlijk telkens kleiner en smaller en zijn van steeds dunner materiaal gemaakt.

We gaan er in deze opgave van uit dat de matroesjka's exacte verkleiningen van elkaar zijn.

Bij een bepaalde serie van zeven matroesjka's is de hoogte van elke volgende pop 20% kleiner dan de vorige. De grootste pop is 28 cm hoog.

- 3p 1 Bereken de hoogte van het kleinste poppetje. Geef je antwoord in hele mm.

Niet alleen de hoogte van de poppetjes neemt telkens af. Ook de dikte van het hout waarvan elk volgend poppetje gemaakt is, neemt telkens af met dezelfde factor. Omdat het gewicht van een poppetje evenredig is met het volume van het gebruikte hout, worden de poppetjes snel lichter.

We kijken weer naar de bovengenoemde serie van zeven matroesjka's. We nemen aan dat alle afmetingen van een volgende pop telkens 20% kleiner zijn dan die van de voorgaande pop.

- 3p 2 Bereken hoeveel procent het gewicht van het kleinste poppetje van bovengenoemde serie is van het gewicht van het grootste poppetje. Geef je antwoord in hele procenten.

Naarmate een serie uit meer poppetjes bestaat, wordt het maken ervan steeds lastiger. Omdat de poppetjes dan niet te snel veel kleiner mogen worden en wel precies in elkaar moeten passen, moeten ze van heel dun materiaal gemaakt worden. De grootste serie matroesjka's is gemaakt in 2003 door de Russische Youlia Bereznitskaia. Die serie bestaat uit 51 poppetjes. De grootste pop is 53,97 cm hoog, de kleinste 0,31 cm. Als de vergrotingsfactor bij elke opeenvolgende pop dezelfde is, moet die ongeveer 0,9 zijn.

- 3p 3 Bereken deze vergrotingsfactor. Geef je antwoord in drie decimalen.

Als je al deze 51 poppen in de lengte achter elkaar legt, is dat een flinke sliert.

De lengte daarvan kun je berekenen met een rij gedefinieerd door de volgende recursieve formule:

$$S(n) = S(n-1) + 53,97 \cdot 0,9^n \text{ met } S(0) = 53,97$$

Hierbij is $S(n)$ de lengte van de sliert tot en met de n -de verkleining van het eerste poppetje.

- 4p 4 Bereken, uitgaande van de formule van $S(n)$, de lengte van deze sliert. Geef je antwoord in hele millimeters.